Решения задач по комбинаторике

***I. На использование принципов умножения и сложения***

1. Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?

*Решение задачи:*

Существует 8 мест, которые должны занять 8 человек. На первое место может стать любой из 8 человек, т.е. способов занять первое место – 8. После того, как один человек стал на первое место, осталось 7 мест и 7 человек, которые могут быть на них размещены, т.е. способов занять второе место – семь. Аналогично для третьего, четвертого и т.д. места. Используя принцип умножения, получаем произведение – . Такое произведение обозначается как 8! (читается 8 факториал) и называется перестановкой P8.

*Ответ*: P8 = 8!

1. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. 1) Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться? 2) Если позывные состоят из четырех букв, которые не повторяются?

*Решение задачи:*

В современном латинском алфавите 26 букв. На первом месте всегда должна стоять одна буква, следовательно, существует только один способ занять первое место.

1) На оставшиеся два места может претендовать любая из 26-ти букв, т.к. буквы в позывных могут повторяться. Используя принцип умножения, получаем произведение: 1= 262.

2) На второе место можно поставить любую из 25 букв, т.к. в позывных буквы не должны повторяться. На третье место – 24 буквы, на четвертое место – 23 буквы. Используя принцип умножения, получаем произведение: 1.

*Ответ*: 1) 262; 2) .

1. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

*Решение задачи:*

Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т.е. существуют 3 способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято. И т.д. Используя принцип умножения, получаем произведение: 3 = 36! = 3P6.

*Ответ*: 3P6 = 36!.

1. Алфавит некоторого языка содержит 30 букв. Сколько существует шестибуквенных слов (цепочка букв от пробела до пробела), составленных из букв этого алфавита, если:
2. буквы в словах не повторяются?
3. буквы в словах могут повторяться?

*Решение задачи:*

Существует шесть мест, на которые нужно разместить 30 букв.

1.  Буквы не должны повторяться. Используя принцип умножения, получаем произведение: . Такое произведение достаточно сложно использовать в дальнейшем, и информация задачи представлена в ней в скрытой форме. В комбинаторике используют для таких произведений формулу размещений. Чтобы получить формулу размещений, умножим это произведение на единицу, которую представим следующим образом: **1** =  =  = =  = **А** *‑ формула для размещений.*



2.  Буквы повторяются. Используя принцип умножения, получаем: 303030303030 = 306 = **Ã***– формула для размещений с повторениями.*

*Ответ*: 1) *А*; 2) *Ã*.

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

*Решение задачи:*

Необходимо посчитать, сколько существует трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, составленных из этих пяти цифр. Трехзначных чисел - *543* = *А*, четырехзначных – *5432* = *А*, пятизначных – *54321* = *А*. Используем принцип сложения: *А**+ А* *+ А* *= 60 + 120 + 120 = 300.*

*Ответ*: 300.

***II. На использование формул для перестановок и размещений***

1. Сколько слов можно образовать из букв слова **фрагмент,** если слова должны состоять:

(а) из восьми букв, (б) из семи букв, (в) из трех букв?

*Решение задачи:*

В слове **фрагмент** 8 букв алфавита.

(а) Всевозможные перестановки 8 букв по восьми местам: ***А* =** =P8.

(б) Размещения 8 букв по 7 местам: ***А*.**

(в) Размещения 8 букв по 3 местам: ***А*.**

*Ответ*: ***P8***, ***А***, ***А***.

1. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, а) если первая из них не равна нулю; б) если номер состоит из одной буквы латинского алфавита, за которой следуют четыре цифры, отличные от нуля?

*Решение задачи:*

а) Всего существует 10 цифр. На первом месте не может быть цифры 0, поэтому способов поставить цифру на первое место существует 9. На втором месте может стоять любая из 10-ти цифр (цифры могут повторяться), т.е. способов поставить цифру на второе место существует 10, и т.д. Используя принцип умножения, получаем: 910101010 = 9104 =9***Ã*.**

б) На первом месте может стоять любая из 26 букв. На остальных местах - любые из девяти цифр, причем они могут повторяться. Используя принцип умножения, получаем: 269999=26***Ã***.

*Ответ*: 9***Ã***, 26***Ã****.*

1. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если (а) две определенные книги должны всегда стоять рядом, (б) эти две книги не должны стоять рядом?

*Решение задачи:*

(а) Книги, которые должны стоять рядом, считаем за одну книгу. Тогда нужно расставить 6 книг по шести местам. Применяя формулу перестановок, получаем: P6 = 6!. Мы учли перестановки шести книг, не учитывая порядок внутри тех книг, которые мы посчитали за одну. А так как две книги по двум местам можно разместить только двумя способами (P2), то получаем окончательно следующее произведение: P2P6 =2 6! = 1440.

(б) Способов переставить 7 книг существует P7= 7!. Из них ‑ 26! способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли вместе существует: 7! ‑ 26!.

*Ответ*: 1440; . 7! ‑ 26!

***III. На использование формул для сочетаний***

1. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

*Решение задачи:*

Для решения этой задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т.к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборке. Запишем формулу для сочетаний и произведем вычисления:

**С** *=* .

*Ответ*: 56.

1. Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

*Решение задачи:*

Из 20-ти элементов необходимо сделать три выборки, причем порядок внутри выборок значения не имеет. Поэтому используем формулу для сочетаний. Чтобы выбрать из 20-ти элементов 3, существует ***С***способов. Остается 17 элементов, из которых выбирается 5 элементов - ***С***способами. Остается 12 элементов, из которых выбирается 12 элементов. Это можно сделать ***С*****= 1, т.е. одним способом. Используя принцип произведения, получаем:***С С С.***

*Ответ*: ***С С С.***

1. Сколькими способами можно отобрать несколько фруктов из семи яблок, четырех лимонов и девяти апельсинов? (Мы считаем, что фрукты одного вида неразличимы.)

*Решение задачи:*

Т.к. фрукты одного вида неразличимы, то существует один способ взять одно яблоко, один способ взять 2 яблока, один способ взять три яблока и т.д., т.е. всего семь способов выбрать несколько яблок (несколько – это не менее одного). Необходимо также прибавить один способ не взять ни одного яблока. Следовательно, существует 8 способов взять яблоки. Аналогично существует 5 способов выбрать лимоны и 10 способов выбрать апельсины. Следуя принципу умножения, получим все способы отбора фруктов: 7510. Но среди этих способов существует один способ, когда не выбирается ни один фрукт. Следовательно, решением данной задачи будет следующее выражение: 7510 – 1 = 349.

*Ответ*: 349.

***IV. На использование формул для перестановок и сочетаний***

1. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова ***сапфир****?* 2) Сколько среди них таких, которые не содержат буквы ***р***? 3) Сколько таких, которые начинаются с буквы ***с*** и оканчиваются буквой ***р****?*

*Решение задачи:*

1.  Из шести букв составляются четырехбуквенные слова, причем порядок букв важен для образования новых слов. Поэтому используется формула для размещений: **А***.*

2.  Необходимо исключить букву **р** из рассмотрения. Количество слов, не содержащих эту букву: **А***.*

3.  На первое место поставить букву **с** можно только одним способом. На последнее место поставить букву **р** можно тоже только одним способом. Остаются 4 буквы, которые необходимо разместить по двум местам: **А***.*

*Ответ*: 360, 120, 12.

1. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно. образовать из букв слова ***уравнение****?*

*Решение задачи:*

В слове **уравнение** 3 согласных и 4 гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество сочетаний 3 согласных из 3-х заданных и двух гласных из четырех заданных: ***С***** и ***С****.* После того, как 5 букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв: ***С**С**P5.***

*Ответ*: ***ССP5.***

***V. На использование формул для перестановок и сочетаний с повторениям***

1. Сколько различных перестановок можно образоватьизо всех букв слова ***перестановка****?* Сколько из них начинается с буквы ***п*** и оканчивается буквой **а**?

*Решение задачи:*

В слове **перестановка** 12 букв, из них повторяются 2 буквы **е** и две буквы **а**. Число перестановок из 12 элементов вычисляется с помощью формулы P12. Но среди этих перестановок будут повторяющиеся, в которых буквы **е** или **а** меняются местами. Чтобы не считать такие перестановки, используется формула для перестановок с повторениями: **** *=* .

Чтобы посчитать количество перестановок, начинающихся на букву **п** и оканчивающихся на букву **а**, необходимо исключить эти элементы и места, на которых они стоят из рассмотрения. Остается 10 букв и десять мест, причем остается только одна повторяющаяся буква **е**. Применяем формулу для перестановок с повторениями:

 *=* .

*Ответ*: *,* .

Источник: <http://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B8+%D0%BF%D0%BE+%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B5&source=web&cd=1&ved=0CGYQFjAA&url=http%3A%2F%2Fpi.sfedu.ru%2Frspu%2Fresources%2Ffor_linguists%2F3%2Fkomb.doc&ei=GCnST87GE6uP4gS02u2xAw&usg=AFQjCNFn8kSVA9R-cUCH53UxpiSm6Ect7g&cad=rjt>